問題

方程式 $\cos z = 4$ を満たす複素数 z のうち、純虚数であるものをすべて求めよ。

解法

オイラーの公式より、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

この関係は任意の複素数 z に対しても成り立つので、

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$

これらを用いて、複素数 z に対する余弦関数は

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

と表される。

ここで、z が純虚数であると仮定する。すなわち、

$$z = ki \quad (k \in \mathbb{R})$$

とおくと、上式は

$$\cos z = \cos(ki) = \frac{e^{i(ki)} + e^{-i(ki)}}{2} = \frac{e^{-k} + e^{k}}{2} = \frac{e^{k} + e^{-k}}{2}$$

これが 4 に等しいという条件より、

$$\frac{e^{k} + e^{-k}}{2} = 4$$

両辺に 2 をかけると、

$$e^{k} + e^{-k} = 8$$

この両辺に e^k をかけて整理する：

$$(e^k)^2 + 1 = 8e^k \quad \Rightarrow \quad e^{2k} - 8e^k + 1 = 0$$

ここで $x = e^k$ と置くと、これは 2 次方程式

$$x^2 - 8x + 1 = 0$$

となる。解の公式より、

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

したがって、

$$e^k = 4 \pm \sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad k = \log_e(4 \pm \sqrt{15})$$

よって、

$$\underline{z = \pm i \log_e(4 + \sqrt{15})}_{\text{(答)}}$$