

問題

xyz 空間内の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(2,1,-1)$, $B(2,-1,2)$, $C(4,5,-1)$ について、四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

解法

まず各ベクトルを求める。

$$\vec{OA} = (2, 1, -1) - (0, 0, 0) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{OB} = (2, -1, 2) - (0, 0, 0) = (2, -1, 2)$$

$$\vec{OC} = (4, 5, -1) - (0, 0, 0) = (4, 5, -1)$$

三重積を用いて、四面体 $OABC$ の体積 V は次の式で与えられる：

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}|$$

まず、外積 $\vec{OA} \times \vec{OB}$ を計算する。

$$\vec{OA} = (2, 1, -1), \quad \vec{OB} = (2, -1, 2)$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \times \vec{OB} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) - \mathbf{j}(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) + \mathbf{k}(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \\ &= \mathbf{i}(2 - 1) - \mathbf{j}(4 + 2) + \mathbf{k}(-2 - 2) = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(6) + \mathbf{k}(-4) \\ &\Rightarrow \vec{OA} \times \vec{OB} = (1, -6, -4) \end{aligned}$$

次に、これと $\vec{OC} = (4, 5, -1)$ の内積をとる：

$$(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = (1)(4) + (-6)(5) + (-4)(-1) = 4 - 30 + 4 = -22$$

よって体積は、

$$V = \frac{1}{6} |-22| = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$\underline{\underline{V = \frac{11}{3}}}_{(答)}$$