問題

次の各問いに答えよ。

（1）x, y, z は実数で、$2025^x = 3^y = 5^z$ を満たすとする。このとき

$$2xy + 4xz - yz = 0$$

であることを示せ。

（2）$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。

解法

（1）まず、2025 を素因数分解すると、

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

よって、

$$2025^x = (3^4 \cdot 5^2)^x = (3^2 \cdot 5)^{2x}$$

したがって、

$$(3^2 \cdot 5)^{2x} = 3^y = 5^z$$

両辺の常用対数（底は 10）をとると、

$$\log_{10}((3^2 \cdot 5)^{2x}) = 2x(\log_{10} 3^2 + \log_{10} 5) = 2x(2\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$$

また、

$$\log_{10}(3^y) = y\log_{10} 3, \quad \log_{10}(5^z) = z\log_{10} 5$$

この 3 つが等しいので、共通の値 k として、

$$2x(2\log_{10} 3 + \log_{10} 5) = y\log_{10} 3 = z\log_{10} 5 = k$$

ここで

$$a = \log_{10} 3, \quad b = \log_{10} 5$$

とおくと、

$$2x(2a + b) = ay = bz = k$$

よって、

$$x = \frac{k}{2(2a+b)}, \quad y = \frac{k}{a}, \quad z = \frac{k}{b}$$

これらを式 $2xy + 4xz - yz$ に代入する。

$$2xy = 2 \cdot \frac{k}{2(2a+b)} \cdot \frac{k}{a} = \frac{k^2}{(2a+b)a}$$

$$4xz = 4 \cdot \frac{k}{2(2a+b)} \cdot \frac{k}{b} = \frac{2k^2}{(2a+b)b}$$

$$yz = \frac{k}{a} \cdot \frac{k}{b} = \frac{k^2}{ab}$$

したがって、

$$2xy + 4xz - yz = \frac{k^2}{(2a+b)a} + \frac{2k^2}{(2a+b)b} - \frac{k^2}{ab}$$

分母を揃えるとすべて $(2a+b)ab$ なので、

$$= \frac{k^2 b + 2k^2 a - k^2(2a+b)}{(2a+b)ab} = \frac{k^2(b + 2a - (2a+b))}{(2a+b)ab} = 0$$

よって、与式は 0 となる。

$$\underline{2xy + 4xz - yz = 0}_{\text{(答)}}$$

(2) 実際に $n^4 + 6n^2 + 23$ を $n^2 + n + 3$ で割ると、

$$n^4 + 6n^2 + 23 = (n^2 - n + 4)(n^2 + n + 3) - n + 11$$

したがって、これが割り切れるためには

$$\frac{n-11}{n^2+n+3} \in \mathbb{Z}$$

(i) $n = 11$ のとき、分子が 0 なので成立。
(ii) $n \neq 11$ のとき、次の条件を満たす必要がある：

$$\left| \frac{n-11}{n^2+n+3} \right| \geq 1$$

(ii-a) $n > 11$ のとき、

$$\left| \frac{n-11}{n^2+n+3} \right| \geq 1 \Rightarrow |n-11| \geq n^2 + n + 3$$

である必要があるが、左辺は $n - 11$、右辺は $n^2 + n + 3$ であり、$n \geq 12$ のとき

$$n^2 + n + 3 > n \Rightarrow n^2 + n + 3 > n - 11$$

よってこの不等式は成り立たず、矛盾する。
したがって、$n > 11$ のときは不適。
(ii-b) $1 \leq n < 11$ のとき、直接調べる：

$$n=1 \Rightarrow \frac{-10}{5}=-2 \in \mathbb{Z}$$
$$n=2 \Rightarrow \frac{-9}{9}=-1 \in \mathbb{Z}$$
$$n=3 \Rightarrow \frac{-8}{15} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=4 \Rightarrow \frac{-7}{23} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=5 \Rightarrow \frac{-6}{33} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=6 \Rightarrow \frac{-5}{45} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=7 \Rightarrow \frac{-4}{59} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=8 \Rightarrow \frac{-3}{75} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=9 \Rightarrow \frac{-2}{93} \notin \mathbb{Z}$$
$$n=10 \Rightarrow \frac{-1}{113} \notin \mathbb{Z}$$

したがって、

$$\underline{n=1,\ 2,\ 11}_{\text{(答)}}$$