問題

複素数平面上の点 z を

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

で定まる点に移す変換を「一次分数変換」という。（ただし a, b, c, d は複素数の定数で、$ad - bc \neq 0$）
この変換が次の条件をすべて満たすとき、a, b, c の値をそれぞれ求めなさい。

- $d = 1$
- 点 $z = 0$ を $w = 2$ に移す
- 点 $z = 2i$ を $w = 0$ に移す（i は虚数単位）
- 円 $|z| = 1$ を円 $|w| = 1$ に移す

2505060205

解法

一次分数変換は

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

の形で与えられており、条件より $d = 1$ と分かるので、式は

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

となる。

まず、2 つの点の対応関係から、連立方程式を立てる：

- $z = 0 \to w = 2$ より

$$2 = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + 1} = b \Rightarrow b = 2$$

- $z = 2i \to w = 0$ より

$$0 = \frac{a \cdot 2i + 2}{c \cdot 2i + 1} \Rightarrow 2ai + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2}{2i} = \frac{-1}{i} = i$$

したがって現時点で、

$$w = \frac{iz+2}{cz+1}$$

次に、「円 $|z| = 1$ を $|w| = 1$ に写す」という条件より、

$$\left| \frac{iz+2}{cz+1} \right| = 1 \quad (\text{ただし } |z| = 1)$$

両辺の絶対値を二乗して：

$$|iz+2|^2 = |cz+1|^2$$

共役を用いて展開する：

$$(iz+2)(\overline{iz+2}) = (cz+1)(\overline{cz+1})$$

ここで

$$\overline{iz+2} = -i\overline{z}+2, \quad \overline{cz+1} = \overline{c}\,\overline{z}+1$$

したがって：

$$(iz+2)(-i\overline{z}+2) = (cz+1)(\overline{c}\,\overline{z}+1)$$

左辺：

$$-iz\cdot i\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4 = z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4$$

右辺：

$$c\overline{c}z\overline{z} + cz + \overline{c}\,\overline{z} + 1$$

ここで $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ より、

$$1 + 2iz - 2i\overline{z} + 4 = c\overline{c} + cz + \overline{c}\,\overline{z} + 1 \Rightarrow 2iz - 2i\overline{z} + 4 = cz + \overline{c}\,\overline{z} + c\overline{c}$$

これがすべての $|z|=1$ を満たすには、係数が一致する必要がある。
ここで $c = 2i$ とおくと、

$$\overline{c} = -2i, \quad c\overline{c} = 4$$

代入して右辺：

$$2iz - 2i\overline{z} + 4$$

左辺と一致するので、条件を満たす。
よって答えは：

$$\underline{a = i, \quad b = 2, \quad c = 2i}_{\text{(答)}}$$